Faculté des sciences et génie
Département de mathématiques et statistique

Examen 2 — Solutions

Probabilités (STT-1500)
20 mars 2024 (8 h 30 à 10 h 20)
Enseignant : Jérôme Soucy

Question 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f(x)$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2+4x+4) & \text{si } -2 \leq x \leq 0\,; \\ a(x^2-4x+4) & \text{si } 0 < x \leq 2\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrez qu'un choix approprié de a fait de f une fonction de densité de probabilité. Rappelez au passage les éléments qui caractérisent une fonction de densité de probabilité.

Pour que $f(x)$ soit une fonction de densité de probabilité, on doit pouvoir trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que :

1. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Remarquons d'abord que la condition 1 sera satisfaite si et seulement si $a \geq 0$. En effet, il suffit de réécrire la fonction de densité comme nous l'avons fait ci-dessous et d'observer que $(x+2)^2$ et $(x-2)^2$ sont des quantités positives quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2)^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0\,; \\ a(x-2)^2 & \text{si } 0 < x \leq 2\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La condition 2 sera satisfaite

$$\begin{aligned} &\iff 1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\iff 1 = \int_{-2}^{0} a(x+2)^2\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} a(x-2)^2\,\mathrm{d}x \\ &\iff 1 = a\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0} + a\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2} \\ &\iff 1 = a\left(\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\right) \\ &\iff a = \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

(b) Montrez que la fonction f vérifie $f(x) = f(-x)$ pour tout $a, x \in \mathbb{R}$.

> Par symétrie, il suffit de montrer que l'identité est vérifiée pour les $x \geq 0$. C'est évident pour $x > 2$, car à ce moment $-x < 2$ et la fonction est nulle à ces endroits. Pour $x \in [0, 2]$, $f(x) = \frac{3}{16}(x-2)^2$. On a alors que $f(-x) = \frac{3}{16}(-x-2)^2 = \frac{3}{16}(-1)^2(x+2)^2 = \frac{3}{16}(x+2)^2 = f(x)$.

(c) Soit X une v.a. dont la fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2+4x+4) & \text{si } -2 \leq x \leq 0\,; \\ a(x^2-4x+4) & \text{si } 0 < x \leq 2\,; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où a est la valeur obtenue à la sous-question (a). Calculez $\mathbb{E}(X)$.

> **Première solution** : Nous allons utiliser la propriété démontrée en (b).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{x\in\mathbb{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{0} x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{0} x f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x f(x)\,\mathrm{d}x && \text{(d'après (b))} \\
&= \int_{2}^{0} (-u) f(u)\,\mathrm{d}(-u) + \int_{0}^{2} x f(x)\,\mathrm{d}x && \text{(en posant } u = -x) \\
&= \int_{2}^{0} u f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{2} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{0}^{2} u f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{2} x f(x)\,\mathrm{d}x && \text{(propriété de l'intégrale)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

> **Deuxième solution** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{x\in\mathbb{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{0} x\left(\frac{3}{16}(x^2+4x+4)\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x\left(\frac{3}{16}(x^2-4x+4)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{16}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right]_{-2}^{0} + \frac{3}{16}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right]_{0}^{2} \\
&= \frac{3}{16}\left(-4 + \frac{32}{3} - 8 + 4 - \frac{32}{3} + 8\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

> En terminant, remarquons que peu importe la valeur de a obtenue en (a), l'intégrale à évaluer pour déterminer l'espérance donnera toujours 0, précisément pour la raison évoquée en (b), où on montre que la fonction f est paire.

Question 2

(a) On lance un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On définit la v.a. X comme étant le nombre de lancers nécessaires jusqu'à l'obtention d'un cinq ou d'un six. Calculez $\mathbb{P}(X = 2)$.

> La probabilité de succès à chacune des épreuves est de $\frac{1}{3}$. Pour que $X = 2$, il faut un échec à la première épreuve et un succès à la seconde. La probabilité que cet événement survienne correspond à $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$.

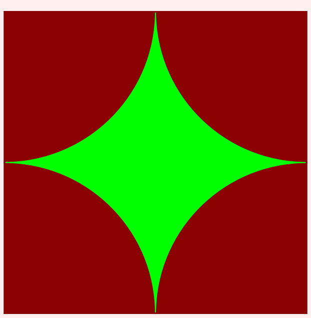
(b) On lance un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On définit la v.a. X comme étant le nombre de lancers nécessaires jusqu'à l'obtention d'un cinq ou d'un six. Calculez l'espérance de X.

> La probabilité de succès à chacune des épreuves est de $\frac{1}{3}$. La variable X compte le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir un premier succès. Ainsi,
>
> $$X \sim \text{géométrique}\left(\frac{1}{3}\right).$$
>
> Son espérance est donc 3.

(c) Une v.a. X est telle que $X \sim \text{exponentielle}\,(3)$. Calculez $\mathbb{P}(X > 1)$.

> Il suffit de calculer
>
> $$\int_1^\infty 3\,\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = \left[-\,\mathrm{e}^{-3x}\right]_1^\infty = -\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{-3} = \mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}050.$$

(d) Vous choisissez un point uniformément dans un carré dont les côtés mesurent 2 cm. Quelle est la probabilité que le point choisi se trouve à une distance d'au moins 1 cm de tous les sommets du carré ?



> Il suffit de calculer le rapport de l'aire de la région en vert avec l'aire du carré de côté 2 cm. L'aire de la région en rouge est la même que celle d'un cercle de rayon 1 cm. Ainsi, la probabilité cherchée est :
>
> $$\frac{2^2 - \pi \cdot 1^2}{4} = \frac{4-\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215.$$

(e) Quelle est la probabilité qu'une série 4 de 7 se termine en exactement 5 parties si les deux équipes qui s'affrontent on la même probabilité de gagner un match ? Rappelons qu'une série 4 de 7 se termine dès qu'une équipe obtient une quatrième victoire.

> Appelons A et B les équipes qui s'affrontent. Définissons les événements G_A et G_B de manière à ce qu'ils désignent les situations où la série est remportée en 5 parties par les équipes A et B respectivement. Ce sont bien sûr des événements incompatibles, de telle sorte que la probabilité cherchée correspond à $\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B)$. Puisque chaque équipe a la même probabilité de remporter une partie, elles ont la même probabilité de remporter la série. On peut donc se limiter à calculer $2\mathbb{P}(G_A)$.
> Désignons maintenant par X le nombre de parties nécessaires pour que l'équipe A remporte 4

victoires. Nous avons que $X \sim$ binomiale négative $\left(4, \frac{1}{2}\right)$. Ainsi,

$$2\mathbb{P}(G_A) = 2\mathbb{P}(X = 5) = 2\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

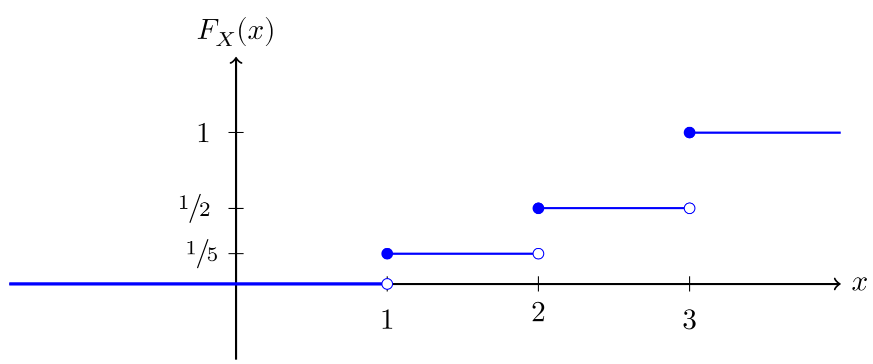
(f) La probabilité que le cours de l'action d'une entreprise termine la journée en hausse est de $0{,}52$. Quelle est la probabilité qu'au cours d'une semaine de cinq jours l'action de l'entreprise termine en hausse exactement trois fois ?

Définissons X la v.a. correspondant au nombre de journées où le cours de l'action de l'entreprise a terminé en hausse au cours de la semaine de cinq jours. Ainsi, $X \sim$ binomiale $(5\,;0{,}52)$. On veut calculer $\mathbb{P}(X = 3)$. Nous avons que

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3}(0{,}52)^3(0{,}48)^2 \approx 0{,}324.$$

Question 3

Pour toutes les sous-questions, on supposera que X est une v.a. dont la fonction de répartition est représentée ci-dessous.



(a) Que vaut $\mathbb{P}(X \leq 3/2)$?

Comme le graphique de la fonction de répartition est une fonction en escalier, X est une v.a. discrète. Le seul saut qui survient lorsque $X \leq 3/2$ se produit en $X = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X \leq 3/2) = \mathbb{P}(X = 1) = F(1) - F(1^-) = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

(b) Que vaut $\mathbb{P}(X = 2)$?

$$\mathbb{P}(X = 2) = F(2) - F(2^-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

(c) Que vaut $\mathbb{P}(1 < X < 2)$?

Puisqu'il n'y a aucun saut dans l'intervalle ouvert $]1, 2[$, la probabilité cherchée est 0.

(d) Si $p_X(x)$ désigne la fonction de masse de X, pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$ la fonction $p_X(x)$ atteint-elle un maximum ?

Le graphique de la fonction de répartition d'une v.a. nous permet de déterminer sa fonction de masse en déterminant d'abord les endroits où il y a des sauts, puis en mesurant l'amplitude de ces sauts. On en déduit ainsi que

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } X = 1\,; \\ 3/10 & \text{si } X = 2\,; \\ 1/2 & \text{si } X = 3\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $0 < 1/5 < 3/10 < 1/2$, on en déduit que la valeur maximale de $p_X(x)$ est atteinte en $x = 3$.

(e) Calculez $\mathbb{E}(X)$.

Nous avons que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x p_X(x) = 1 \cdot 1/5 + 2 \cdot 3/10 + 3 \cdot 1/2 = 23/10 = 2{,}3.$$

Question 4

Soit X une v.a. telle que $X \sim$ exponentielle (λ).

(a) Calculez $\mathbb{P}(\{X = 2\} \cup \{X = 2024\})$.

Puisque les événements $\{X = 2\}$ et $\{X = 2024\}$ sont incompatibles,

$$\mathbb{P}(\{X = 2\} \cup \{X = 2024\}) = \mathbb{P}(\{X = 2\}) + \mathbb{P}(\{X = 2024\}) = 0 + 0 = 0.$$

En effet, les deux probabilités $\mathbb{P}(\{X = 2\})$ et $\mathbb{P}(\{X = 2024\})$ sont nulles puisque X est une v.a. continue.

(b) Exprimez $\mathbb{P}(1 < X \leq 2)$ en fonction de λ.

$\mathbb{P}(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1)$, où F est la fonction de répartition de X. Pour $x > 0$, nous avons que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_{t=0}^{x} \\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda x} - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda \cdot 0}\right) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1 < X \leq 2) &= F(2) - F(1) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda} - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}. \end{aligned}$$

On peut bien sûr se limiter à calculer $\int_1^2 \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t$.

(c) Une variable aléatoire continue Y est telle que $\mathbb{P}(1 < Y \leq 2) = \frac{1}{4}$. Est-il possible que

$$Y \sim \text{exponentielle}\,(\lambda)$$

pour une certain $\lambda > 0$? Si oui, trouvez une telle valeur de λ. Dans le cas contraire, justifiez pourquoi il n'existe aucune valeur de $\lambda > 0$ telle que $Y \sim \text{exponentielle}\,(\lambda)$.

D'après le travail fait en (b), ce sera possible si on peut trouver $\lambda > 0$ tel que $\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda} = \frac{1}{4}$. Pour résoudre cette équation, il suffit de faire le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-\lambda}$. On a alors que $u^2 = \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda}$. L'équation devient alors

$$u - u^2 = \frac{1}{4}.$$

La seule solution de cette équation polynomiale du second degré est $u = \frac{1}{2}$. Comme $u = \mathrm{e}^{-\lambda}$, on en déduit que $\ln 2^{-1} = -\lambda$, d'où $\lambda = \ln 2$.

Remarque : Si on tente de généraliser le problème à une probabilité $p \in [0, 1]$ plutôt que d'imposer la valeur de $\frac{1}{4}$, on trouve que

$$u = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 4p}}{2}.$$

Pour que ces solutions aient du sens, il faut que $1 - 4p \geq 0$, car on ne peut prendre la racine carrée d'un nombre négatif dans ce contexte. On en déduit que $p \leq \frac{1}{4}$. Le cas où $p = 0$ est problématique, car il mène à $u = 0$. Comme $u = \mathrm{e}^{-\lambda}$ et que l'exponentielle ne s'annulle jamais, on doit exclure cette possibilité. Notons finalement que pour les $p \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$ il y aura deux solutions distinctes, à savoir

$$\lambda = -\ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p}}{2}\right).$$

La connaissance de la quantité $\mathbb{P}(1 < Y \leq 2)$ n'est donc pas suffisante pour déterminer le paramètre d'une distribution exponentielle, sauf dans le cas où $p = \frac{1}{4}$.